$A=U\Lambda U^*$

С.Н. Зиненко

Линейная алгебра

Линейные операторы

(теория к задачам)

2016

6. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ МАТРИЦЫ В ДАННОМ БАЗИСЕ

№ 6.1.

Произведением матрицы A размера $m \times n$ на вектор-столбец $\boldsymbol{x}$ высоты n называется вектор-столбец $\boldsymbol{y} = A \cdot \boldsymbol{x}$ высоты m, компоненты которого равны

$$y_{\boldsymbol{i}} = a_{\boldsymbol{i}1} x_1 + \ldots + a_{\boldsymbol{ij}} x_{\boldsymbol{j}} + \ldots + a_{\boldsymbol{i}n} x_n = \sum_{\boldsymbol{j}=1}^{n} a_{\boldsymbol{ij}} x_{\boldsymbol{j}}, \quad (i = 1, \ldots, m)$$

$$\underset{\boldsymbol{y}}{\underset{\parallel}{\begin{bmatrix} * \\ \cdot \\ \boxed{y_{\boldsymbol{i}}} \\ \cdot \\ * \end{bmatrix}}} = \underset{A}{\underset{\parallel}{\begin{bmatrix} * & \ldots & * & \ldots & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\boldsymbol{i}1} & \ldots & a_{\boldsymbol{ij}} & \ldots & a_{\boldsymbol{i}n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & \ldots & * & \ldots & * \end{bmatrix}}} \cdot \underset{\boldsymbol{x}}{\underset{\parallel}{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{\boldsymbol{j}} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}}$$

Нетрудно видеть, что операция умножения матрицы на вектор – линейна

$$A \cdot (\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2) = \alpha_1 A \cdot \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 A \cdot \boldsymbol{x}_2$$

№ 6.2.

Оператор $\mathbf{A}: \mathbb{E}_n \to \mathbb{F}_m \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{E}_n \ni \boldsymbol{a} \xrightarrow{\mathbf{A}} \mathbf{A}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \in \mathbb{F}_m$ *называется* ***линейным****, если*

$$\mathbf{A}(\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2) = \alpha_1 \mathbf{A}\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{A}\boldsymbol{a}_2$$

Выберем и зафиксируем в пространствах $\mathbb{E}_n, \mathbb{F}_m$ базисы $\{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}\} = \{\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}, \{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m\}\}$
Действие линейного оператора однозначно определяется его значениями на базисе

$$\mathbb{E}_n \ni \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{j}} \xrightarrow{\mathbf{A}} \mathbf{A}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{j}} \in \mathbb{F}_m$$

Разложив образы $\mathbf{A}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{j}} \in \mathbb{F}_m$ по базису $\{\boldsymbol{f}\} \in \mathbb{F}_m$, составим из столбцов-координат $\boldsymbol{q}_{\boldsymbol{j}}$ матрицу A (получившую название матрицы оператора $\mathbf{A}$ в базисах $\{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}\}$)

$$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{j}} \in \mathbb{E}_n \;\Rightarrow\; \mathbf{A}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{j}} \in \mathbb{F}_m \xrightarrow{\{\boldsymbol{f}\}} \boldsymbol{q}_{\boldsymbol{j}} = \begin{bmatrix} a_{1\boldsymbol{j}} \\ \cdot \\ a_{\boldsymbol{ij}} \\ \cdot \\ a_{m\boldsymbol{j}} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_m \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \xrightarrow{\{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}\}} A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1\boldsymbol{j}} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\boldsymbol{i}1} & \ldots & a_{\boldsymbol{ij}} & \ldots & a_{\boldsymbol{i}n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{m\boldsymbol{j}} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

На компоненты матрицы $A = [\, a_{\boldsymbol{ij}} \,]$ можно смотреть, как на координаты оператора $\mathbf{A}$ в базисах $\{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}\}$. Действие оператора $\mathbf{A}$ сводится к умножению его матрицы A на вектор-столбец $\boldsymbol{x}$ координат вектора $\boldsymbol{a} \in \mathbb{E}_n$ в базисе $\{\boldsymbol{e}\}$, получая вектор-столбец $\boldsymbol{y}$ координат вектора $\boldsymbol{b} \in \mathbb{F}_m$ в базисе $\{\boldsymbol{f}\}$

$$\boldsymbol{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{a} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{b} \xrightarrow{\{\boldsymbol{f}\}} \boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ y_{\boldsymbol{i}} \\ \cdot \\ y_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} \xrightarrow{\{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}\}} A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1\boldsymbol{j}} & \ldots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{\boldsymbol{i}1} & \ldots & a_{\boldsymbol{ij}} & \ldots & a_{\boldsymbol{i}n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \ldots & a_{m\boldsymbol{j}} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a} \xrightarrow{\{\boldsymbol{e}\}} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{\boldsymbol{j}} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$$

№ 6.3.

Суммой *двух линейных операторов* $\mathbf{A}, \mathbf{B}: \mathbb{E}_n \to \mathbb{F}_m$ *называется оператор* $\mathbf{C}$, *действующий по правилу*

$$\mathbf{C}\,\boldsymbol{a} = \mathbf{A}\,\boldsymbol{a} + \mathbf{B}\,\boldsymbol{a}$$

и обозначаемый $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$. *Очевидно,* $\mathbf{C}: \mathbb{E}_n \to \mathbb{F}_m$ *- линейный.*

Произведением *линейного оператора* $\mathbf{A}: \mathbb{E}_n \to \mathbb{F}_m$ *на* ***число*** α *называется оператор* $\mathbf{C}$, *действующий по правилу*

$$\mathbf{C}\,\boldsymbol{a} = \alpha\,(\mathbf{A}\,\boldsymbol{a})$$

и обозначаемый $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{A}$. *Очевидно,* $\mathbf{C}: \mathbb{E}_n \to \mathbb{F}_m$ *- линейный.*

Замечание. *Множество всех линейных операторов, действующих из* $\mathbb{E}_n$ *в* $\mathbb{F}_m$ *само образует линейное пространство размерности* $n \cdot m$.

Произведением *линейных* ***операторов*** $\mathbf{A}: \mathbb{G}_l \to \mathbb{F}_m$, $\mathbf{B}: \mathbb{E}_n \to \mathbb{G}_l$ *называется оператор* $\mathbf{C}$, *действующий по правилу*

$$\mathbf{C}\,\boldsymbol{a} = \mathbf{A}(\mathbf{B}\,\boldsymbol{a})$$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{G}_l \arrow[dl, "\mathbf{A}"'] & \\ \mathbb{F}_m & & \mathbb{E}_n \arrow[ul, "\mathbf{B}"'] \arrow[ll, "\mathbf{C} = \mathbf{AB}"] \end{tikzcd}$$

и обозначаемый $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$. *Очевидно,* $\mathbf{C}: \mathbb{E}_n \to \mathbb{F}_m$ *- линейный.*

Замечание. *Сумма операторов и произведение их на число соответствуют сумме функций и произведению их на число, а произведение операторов - построению сложной функции.*

Из связи между линейными операторами и матрицами, вытекают аналогичные определения для матриц соответствующей размерности.

Суммой *двух матриц* $\boldsymbol{A} = [\,a_{ij}\,]$, $\boldsymbol{B} = [\,b_{ij}\,]$ *размера* $m \times n$ *называется матрица* $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ *размера* $m \times n$ *такая, что*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad (i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n) \qquad \boxed{\boldsymbol{C}} = \boxed{\boldsymbol{A}} + \boxed{\boldsymbol{B}}$$

Произведением *матрицы* $\boldsymbol{A} = [\,a_{ij}\,]$ *размера* $m \times n$ *на* ***число*** α *называется матрица* $\boldsymbol{C} = \alpha\boldsymbol{A}$ *размера* $m \times n$ *такая, что*

$$c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij} \qquad (i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n) \qquad \boxed{\boldsymbol{C}} = \alpha \cdot \boxed{\boldsymbol{A}}$$

Произведением *двух* ***матриц*** $\boldsymbol{A} = [\,a_{ik}\,]$, $\boldsymbol{B} = [\,b_{kj}\,]$ *размеров* $m \times l$, $l \times n$ *называется матрица* $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB}$ *размера* $m \times n$ *такая, что*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{l} a_{ik} \cdot b_{kj} \qquad (i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n) \qquad \boxed{\boldsymbol{C}} = \boxed{\quad\boldsymbol{A}\quad} \cdot \boxed{\boldsymbol{B}}$$

Замечание. *Если разбить матрицы* $\boldsymbol{C}$ *и* $\boldsymbol{B}$ *на столбцы*

$$\boldsymbol{C} = [\,\boldsymbol{c}_1 \dots \boldsymbol{c}_k \dots \boldsymbol{c}_n\,] = [\,\boldsymbol{c}_k\,], \quad \boldsymbol{B} = [\,\boldsymbol{b}_1 \dots \boldsymbol{b}_k \dots \boldsymbol{b}_n\,] = [\,\boldsymbol{b}_k\,]$$

то

$$[\,\boldsymbol{c}_k\,] = \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \cdot [\,\boldsymbol{b}_k\,] = [\,\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{b}_k\,] \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{c}_k = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{b}_k$$

№ 6.4.

Суперпозиция двух линейных отображений $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}$ *есть снова линейное отображение*

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \left[\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\ \right] = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}$$

матрицей которого является произведение $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$

7. ЯДРО И ОБРАЗ ОПЕРАТОРА. ОБРАТНЫЙ ОПЕРАТОР

Ядром $\operatorname{Ker}\mathbf{A}$ *и* ***образом*** $\operatorname{Ran}\mathbf{A}$ *оператора* $\mathbf{A}\colon \mathbb{E}_n \to \mathbb{F}_m$ *называются множества*

$$\operatorname{Ker}\mathbf{A} = \left\{ \boldsymbol{a} \in \mathbb{E}_n : \ \mathbf{A}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \right\} \qquad \operatorname{Ran}\mathbf{A} = \left\{ \boldsymbol{b} \in \mathbb{F}_m : \ \boldsymbol{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{a} \right\}$$

Очевидно, ядро $\operatorname{Ker}\mathbf{A} \subseteq \mathbb{E}_n$ *и образ* $\operatorname{Ran}\mathbf{A} \subseteq \mathbb{F}_m$ *являются подпространствами в соответствующих пространствах. Их размерности связаны равенством*

$$\dim\operatorname{Ker}\mathbf{A} + \dim\operatorname{Ran}\mathbf{A} = \dim\mathbb{E}_n$$

Данные определения переносятся на матрицы $\boldsymbol{A}$ *размерности* $m \times n$, *которые можно отождествить с соответствующими операторами* $\mathbb{R}_n \ni \boldsymbol{x} \xrightarrow{\mathbf{A}} \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}_m \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{y}$

Ядро матрицы - это подпространство решений $\mathbb{L}_0$ *однородной системы линейных уравнений с матрицей коэффициентов* $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \dim\operatorname{Ker}\boldsymbol{A} = \dim\mathbb{L}_0$$

Образ матрицы – это множество столбцов $\boldsymbol{y}$ *высоты* m *вида*

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Ax} = \left[\, \boldsymbol{q}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{q}_j \ \ldots \ \boldsymbol{q}_n \,\right] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_j \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{q}_1 \cdot x_1 + \ldots + \boldsymbol{q}_j \cdot x_j + \ldots + \boldsymbol{q}_n \cdot x_n$$

т.е. это линейная оболочка ее столбцов

$$\operatorname{Ran}\boldsymbol{A} = \operatorname{Lin}\left\{ \boldsymbol{q}_1, \ \ldots, \ \boldsymbol{q}_j, \ \ldots, \ \boldsymbol{q}_n \right\} \quad \Rightarrow \quad \dim\operatorname{Ran}\boldsymbol{A} = \operatorname{rang}\boldsymbol{A}$$

Связь между размерностями ядра и образа матрицы – это иное выражение равенства

$$\dim\mathbb{L}_0 + \operatorname{rang}\boldsymbol{A} = n$$

№ 7.2.

Если $\mathbb{E}_n = \mathbb{F}_m$, *то говорят об операторах, действующих в пространстве* $\mathbb{E}_n$. *В этом случае для любых двух операторов* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *имеют смысл операции*

$$\alpha\mathbf{A}, \qquad \mathbf{A} + \mathbf{B}, \qquad \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \overset{?}{\gneqq} \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$$

Оператор $\mathbf{I}$ *называется* ***единичным*** *(тождественным), если*

$$\mathbf{I}\boldsymbol{x} \equiv \boldsymbol{x}, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{E}_n \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{I} = \mathbf{I}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad \forall\mathbf{A}$$

Операторы $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *называются* ***обратными*** *друг к другу, если*

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{A}\boldsymbol{x} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{B}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \quad \left(\forall \boldsymbol{x}, \ \boldsymbol{y} \in \mathbb{E}_n\right) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$$

Теорема

Для того,

1) чтобы $\exists\, \mathbf{A}^{-1}$ *(т.е. оператор* $\mathbf{A}$ *- невырожденный)*

$\Leftrightarrow$

1) чтобы $\operatorname{Ran}\mathbf{A} = \mathbb{E}_n \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Ker}\mathbf{A} = \boldsymbol{0}$

№ 7.3.

Для квадратных матриц размера n вводятся определения, аналогичные операторным. Матрица $\boldsymbol{I}$ *называется* ***единичной****, если*

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A},\quad \forall\boldsymbol{A}\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{I}=\begin{bmatrix}1&\dots&0&\dots&0\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ 0&\dots&\boldsymbol{I}&\dots&0\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ 0&\dots&0&\dots&1\end{bmatrix}=\left[\,\delta_{\boldsymbol{ij}}\,\right],\ \text{ где }\ \delta_{\boldsymbol{ij}}=\begin{bmatrix}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{bmatrix}\ \text{- символ Кронекера}$$

Матрицы $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$ *называются* ***обратными*** *друг к другу, если*

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$$

Очевидно, единичному оператору в любом базисе $\left\{\,\boldsymbol{e}\,\right\}$ *отвечает единичная матрица*

$$\mathbf{I}\xrightarrow{\{\boldsymbol{e}\}}\boldsymbol{I}$$

а паре взаимно обратных операторов взаимно обратные матрицы

$$\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}\quad\Rightarrow\quad \mathbf{A}\xrightarrow{\{\boldsymbol{e}\}}\boldsymbol{A},\quad \mathbf{B}\xrightarrow{\{\boldsymbol{e}\}}\boldsymbol{B}\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$$

№ 7.4.

Из формул разложения определителя по элементам

$i^{\underline{ой}}$ строки

$$\sum_{k=1}^{n}a_{\boldsymbol{i}k}\,A_{\boldsymbol{j}k}=\det\boldsymbol{A}\cdot\delta_{\boldsymbol{ij}}$$

$j^{\underline{го}}$ столбца

$$\sum_{k=1}^{n}a_{k\boldsymbol{j}}\cdot A_{k\boldsymbol{i}}=\det\boldsymbol{A}\cdot\delta_{\boldsymbol{ji}}$$

следует, что если $\det\boldsymbol{A}\neq 0$*, то существует обратная матрица, равная*

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{\det\boldsymbol{A}}\ \hat{\boldsymbol{A}}'$$

где $\hat{\boldsymbol{A}}'$ *транспонированная матрица алгебраических дополнений*

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boxed{a_{11}\dots a_{1\boldsymbol{j}}\dots a_{1n}}\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \boxed{a_{\boldsymbol{i}1}\dots a_{\boldsymbol{ij}}\dots a_{\boldsymbol{i}n}}\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \boxed{a_{n1}\dots a_{n\boldsymbol{j}}\dots a_{nn}}\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad \hat{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}\boxed{A_{11}\dots A_{1\boldsymbol{j}}\dots A_{1n}}\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \boxed{A_{\boldsymbol{i}1}\dots A_{\boldsymbol{ij}}\dots A_{\boldsymbol{i}n}}\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ \boxed{A_{n1}\dots A_{n\boldsymbol{j}}\dots A_{nn}}\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad \hat{\boldsymbol{A}}'=\begin{bmatrix}A_{11}&\cdot&A_{\boldsymbol{i}1}&\cdot&A_{n1}\\ \vdots&\cdot&\vdots&\cdot&\vdots\\ A_{1\boldsymbol{j}}&\cdot&A_{\boldsymbol{ij}}&\cdot&A_{n\boldsymbol{j}}\\ \vdots&\cdot&\vdots&\cdot&\vdots\\ A_{1n}&\cdot&A_{\boldsymbol{i}n}&\cdot&A_{nn}\end{bmatrix}$$

№ 7.5.

Обратную матрицу $\boldsymbol{A}^{-1}$ *можно рассматривать как решение* $\boldsymbol{X}$ *матричного уравнения*

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{I}$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\left[\,\boldsymbol{x}_1 \dots \boldsymbol{x}_k \dots \boldsymbol{x}_n\,\right]=\left[\,\boldsymbol{e}_1 \dots \boldsymbol{e}_k \dots \boldsymbol{e}_n\,\right] \quad\Rightarrow\quad \left[\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k\,\right]=\left[\,\boldsymbol{e}_k\,\right]$$

Следовательно, $k^{\underline{ый}}$ *столбец* $\boldsymbol{x}_k$ *матрицы* $\boldsymbol{X}$ *есть решение неоднородной системы с матрицей коэффициентов* $\boldsymbol{A}$ *и правой частью* $\boldsymbol{e}_k$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{e}_k$$

Решая полученные системы линейных неоднородных уравнений методом Гаусса (полному), преобразуем матрицу $\boldsymbol{A}$ *в расширенных матрицах систем* $\left[\,\boldsymbol{A}\middle|\boldsymbol{e}_k\,\right]$ *в единичную* $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{I}$. *Тогда правые части преобразуются в решения систем* $\boldsymbol{e}_k\sim\boldsymbol{x}_k$ *Следовательно, если построить объединенную расширенную матрицу*

$$\left[\,\boldsymbol{A}\middle|\,\boldsymbol{e}_1 \dots \boldsymbol{e}_k \dots \boldsymbol{e}_n\,\right]=\left[\,\boldsymbol{A}\middle|\,\boldsymbol{I}\,\right]$$

и преобразовать методом Гаусса матрицу $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{I}$ *в единичную, то правая часть* $\boldsymbol{I}\sim\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}$ *преобразуется в матричное решение*

$$\left[\,\boldsymbol{A}\middle|\,\boldsymbol{I}\,\right]\sim\left[\,\boldsymbol{I}\middle|\boldsymbol{A}^{-1}\,\right]$$

№ 7.6.

Если

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$$

и $\det\boldsymbol{A}\neq 0$, *так что* $\exists\,\boldsymbol{A}^{-1}$, *то*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y} \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{y} \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{I}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y} \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}$$

Замечание. По существу решена задача нахождения для линейной вектор-функции с n компонентами от n неизвестных

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$$

обратной вектор-функции

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}^{[-1]}(\boldsymbol{y})$$

№ 7.7.

Решениями матричных уравнений

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C} \qquad \boldsymbol{Y}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C} \qquad \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{Z}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$$

при условии невырожденности матриц $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$, *являются матрицы*

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{C} \qquad \boldsymbol{Y}=\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}^{-1} \qquad \boldsymbol{Z}=\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}^{-1}$$

Дополнение.

Преобразование строк (столбцов) матрицы $\boldsymbol{A}\sim\tilde{\boldsymbol{A}}$ *с помощью элементарных операций равносильно умножению слева (справа) на невырожденные матрицы вида*

*1) “**перестановка**”* $\boldsymbol{i}$ *-ой строки (столбца) с* $\boldsymbol{j}$ *-ой*

$$\boldsymbol{I}\to\boldsymbol{T}_{i\leftrightarrow j}\qquad\Rightarrow\quad \begin{matrix}i\\j\end{matrix}\underset{\substack{\backslash\backslash\\ \boldsymbol{I}}}{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\ \boxed{0\;\;1\;\;0\;\;0}\\ \boxed{0\;\;0\;\;1\;\;0}\\ 0&0&0&1\end{bmatrix}}\to\underset{\substack{\backslash\backslash\\ \boldsymbol{T}_{i\leftrightarrow j}}}{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}}$$

*2) “**умножение**” -* $\boldsymbol{k}$ *-ой строки (столбца) на* $\alpha\neq0$

$$\boldsymbol{I}\to\boldsymbol{T}_{\alpha\times k}\qquad\Rightarrow\quad \alpha\times\;k\;\underset{\substack{\backslash\backslash\\ \boldsymbol{I}}}{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\ \boxed{0\;\;1\;\;0\;\;0}\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\end{bmatrix}}\to\underset{\substack{\backslash\backslash\\ \boldsymbol{T}_{\alpha\times k}}}{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\ \boxed{0\;\;\alpha\;\;0\;\;0}\\ 0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}}$$

*3) “**сложение**” -* $\boldsymbol{i}$ *-ой строки (столбца) с* $\boldsymbol{j}$ *-ой*

$$\boldsymbol{I}\to\boldsymbol{T}_{i+j}\qquad\Rightarrow\quad \begin{matrix}i\\+\\j\end{matrix}\underset{\substack{\backslash\backslash\\ \boldsymbol{I}}}{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\ \boxed{0\;\;1\;\;0\;\;0}\\ \boxed{0\;\;0\;\;1\;\;0}\\ 0&0&0&1\end{bmatrix}}\to\underset{\substack{\backslash\backslash\\ \boldsymbol{T}_{i+j}}}{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\ \boxed{0\;\;1\;\;1\;\;0}\\0&0&0&1\end{bmatrix}}$$

Нахождение обратной матрицы $\boldsymbol{A}^{-1}$ *методом Гаусса*

$$\left[\boldsymbol{A}\,\middle|\,\boldsymbol{I}\right]\sim\left[\boldsymbol{I}\,\middle|\,\boldsymbol{A}^{-1}\right]$$

сводится к последовательному преобразованию строк с помощью элементарных операций, что равносильно последовательному умножению слева на $k^{\underline{ом}}$ *шаге* $(k=1,\,\dots,\,n)$ *на элементарные матрицы вида*

$$\dots\cdot\overset{\boldsymbol{T}_{1-\beta_{1k}\times k}}{\overset{//}{\begin{bmatrix}1&-\beta_{1k}&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}}}\cdot\overset{\boldsymbol{T}_{\alpha_k^{-1}\times k}}{\overset{//}{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\alpha_k^{-1}&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}}}\cdot\overset{\boldsymbol{T}_{k\leftrightarrow ?}}{\overset{//}{\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}}}\cdot\overset{\boldsymbol{A}}{\overset{//}{\begin{bmatrix}1&a_{1k}&*&*\\0&\boxed{a_{kk}}&*&*\\0&a_{ik}&*&*\\0&a_{nk}&*&*\end{bmatrix}}}=\overset{\tilde{\boldsymbol{A}}}{\overset{//}{\begin{bmatrix}1&0&*&*\\0&1&*&*\\0&a_{ik}&*&*\\0&a_{nk}&*&*\end{bmatrix}}}$$

$$\beta_{1k}=a_{1k}\qquad\qquad \alpha_k=a_{kk}\neq0\qquad\qquad a_{kk}\overset{?}{=}0$$

так что обратимая матрица может быть разложена в произведение элементарных

$$\boldsymbol{A}=\;\dots\;\cdot\boldsymbol{T}_{k\leftrightarrow ?}\cdot\boldsymbol{T}_{\alpha_k\times k}\cdot\left(\;\dots\cdot\boldsymbol{T}_{i+\beta_{ik}\times k}\cdot\dots\right)\cdot\;\dots$$

8. МАТРИЦА ПЕРЕХОДА К НОВОМУ БАЗИСУ

Пусть $\{\boldsymbol{e}\}=\{\boldsymbol{e}_1,\ \dots,\boldsymbol{e}_i,\ \dots,\ \boldsymbol{e}_n\}$, $\{\tilde{\boldsymbol{e}}\}=\{\tilde{\boldsymbol{e}}_1,\ \dots,\ \tilde{\boldsymbol{e}}_j,\ \dots,\ \tilde{\boldsymbol{e}}_n\}$ *старый и новый базисы пространства* $\mathbb{E}_n$. *Разлагая новый базис* $\{\tilde{\boldsymbol{e}}\}$ *по старому* $\{\boldsymbol{e}\}$, *составим из столбцов координат* $\boldsymbol{t}_j$ *векторов* $\tilde{\boldsymbol{e}}_j$ *матрицу* $\boldsymbol{T}=\left[\boldsymbol{t}_1\ \dots\ \boldsymbol{t}_j\ \dots\ \boldsymbol{t}_n\right]$

$$\tilde{\boldsymbol{e}}_j=\tau_{1j}\boldsymbol{e}_1+\ldots+\tau_{ij}\boldsymbol{e}_i+\ldots+\tau_{nj}\boldsymbol{e}_n\xrightarrow{\{\boldsymbol{e}\}}\begin{bmatrix}\tau_{1j}\\ \cdots\\ \tau_{ij}\\ \cdots\\ \tau_{nj}\end{bmatrix}=\boldsymbol{t}_j\quad\Rightarrow\quad\boldsymbol{T}=\left[\boldsymbol{t}_1\ \dots\ \boldsymbol{t}_j\ \dots\ \boldsymbol{t}_n\right]=\begin{bmatrix}\tau_{11}&\dots&\tau_{1j}&\dots&\tau_{1n}\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ \tau_{i1}&\dots&\tau_{ij}&\dots&\tau_{in}\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ \tau_{n1}&\dots&\tau_{nj}&\dots&\tau_{nn}\end{bmatrix}$$

называемую ***матрицей перехода*** *от старого базиса к новому* $\{\boldsymbol{e}\}\xrightarrow{\boldsymbol{T}}\{\tilde{\boldsymbol{e}}\}$
Аналогично строится матрица перехода $\tilde{\boldsymbol{T}}$ *от нового базиса к старому* $\{\tilde{\boldsymbol{e}}\}\xrightarrow{\tilde{\boldsymbol{T}}}\{\boldsymbol{e}\}$

$$\boldsymbol{e}_i=\tilde{\tau}_{1i}\tilde{\boldsymbol{e}}_1+\ldots+\tilde{\tau}_{ji}\tilde{\boldsymbol{e}}_j+\ldots+\tilde{\tau}_{ni}\tilde{\boldsymbol{e}}_n\xrightarrow{\{\tilde{\boldsymbol{e}}\}}\begin{bmatrix}\tilde{\tau}_{1i}\\ \cdots\\ \tilde{\tau}_{ji}\\ \cdots\\ \tilde{\tau}_{ni}\end{bmatrix}=\tilde{\boldsymbol{t}}_i\quad\Rightarrow\quad\tilde{\boldsymbol{T}}=\left[\tilde{\boldsymbol{t}}_1\ \dots\ \tilde{\boldsymbol{t}}_i\ \dots\ \tilde{\boldsymbol{t}}_n\right]=\begin{bmatrix}\tilde{\tau}_{11}&\dots&\tilde{\tau}_{1i}&\dots&\tilde{\tau}_{1n}\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ \tilde{\tau}_{j1}&\dots&\tilde{\tau}_{ji}&\dots&\tilde{\tau}_{jn}\\ \cdot&\cdot&\cdot&\cdot&\cdot\\ \tilde{\tau}_{n1}&\dots&\tilde{\tau}_{ni}&\dots&\tilde{\tau}_{nn}\end{bmatrix}$$

Матрицы $\boldsymbol{T}$, $\tilde{\boldsymbol{T}}$ *связаны равенством*

$$\left[\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{e}}_j&=\sum_{k=1}^{n}\tau_{kj}\boldsymbol{e}_k=\sum_{k=1}^{n}\tau_{kj}\Big(\sum_{i=1}^{n}\tilde{\tau}_{ik}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}\tilde{\tau}_{ik}\,\tau_{kj}\Big)\tilde{\boldsymbol{e}}_i=\sum_{i=1}^{n}\delta_{ij}\,\tilde{\boldsymbol{e}}_i\\ \boldsymbol{e}_i&=\sum_{k=1}^{n}\tilde{\tau}_{ki}\tilde{\boldsymbol{e}}_k=\sum_{k=1}^{n}\tilde{\tau}_{ki}\Big(\sum_{j=1}^{n}\tau_{jk}\boldsymbol{e}_j\Big)=\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}\tau_{jk}\,\tilde{\tau}_{ki}\Big)\boldsymbol{e}_j=\sum_{j=1}^{n}\delta_{ji}\,\boldsymbol{e}_j\end{aligned}\right.\Rightarrow\left[\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\tilde{\tau}_{ik}\,\tau_{kj}=\delta_{ij}\\ &\sum_{k=1}^{n}\tau_{jk}\,\tilde{\tau}_{ki}=\delta_{ji}\end{aligned}\right.\Rightarrow\left[\begin{aligned}&\tilde{\boldsymbol{T}}\cdot\boldsymbol{T}=\boldsymbol{I}\\ &\boldsymbol{T}\cdot\tilde{\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{I}\end{aligned}\right.$$

№ 8.2.

Разлагая произвольный вектор $\boldsymbol{a}\in\mathbb{E}_n$ *по старому* $\{\boldsymbol{e}\}$ *и новому* $\{\tilde{\boldsymbol{e}}\}$ *базису и учитывая связь между ними*

$$\left[\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\sum_{j=1}^{n}\tilde{x}_j\tilde{\boldsymbol{e}}_j=\sum_{j=1}^{n}\tilde{x}_j\Big(\sum_{i=1}^{n}\tau_{ij}\boldsymbol{e}_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}\tau_{ij}\tilde{x}_j\Big)\boldsymbol{e}_i=\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{e}_i\\ \boldsymbol{a}&=\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{e}_i=\sum_{i=1}^{n}x_i\Big(\sum_{j=1}^{n}\tilde{\tau}_{ji}\tilde{\boldsymbol{e}}_j\Big)=\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}\tilde{\tau}_{ji}x_i\Big)\tilde{\boldsymbol{e}}_j=\sum_{j=1}^{n}\tilde{x}_j\tilde{\boldsymbol{e}}_j\end{aligned}\right.\quad\Rightarrow\quad\left[\begin{aligned}x_i&=\sum_{j=1}^{n}\tau_{ij}\tilde{x}_j\\ \tilde{x}_j&=\sum_{i=1}^{n}\tilde{\tau}_{ji}x_i\end{aligned}\right.$$

получим связь между координатами вектора

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}\,\tilde{\boldsymbol{x}},\qquad\tilde{\boldsymbol{x}}=\tilde{\boldsymbol{T}}\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}$$

№ 8.3.

$$\mathrm{A}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\ \Rightarrow\left[\begin{aligned}&\xrightarrow{\{\boldsymbol{e}\}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}\\ &\xrightarrow{\{\tilde{\boldsymbol{e}}\}}\tilde{\boldsymbol{A}}\,\tilde{\boldsymbol{x}}=\tilde{\boldsymbol{y}}\end{aligned}\right.\Rightarrow\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}=\boldsymbol{T}\tilde{\boldsymbol{y}}=\boldsymbol{T}\,\tilde{\boldsymbol{A}}\,\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{T}\,\tilde{\boldsymbol{A}}\,\tilde{\boldsymbol{T}}\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{T}\,\tilde{\boldsymbol{A}}\,\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{x}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}\,\tilde{\boldsymbol{A}}\,\boldsymbol{T}^{-1}$$

№ 8.4.

Система векторов $\{\, \boldsymbol{f} \,\} = \{\, \boldsymbol{f}_1, \, \dots \, , \, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{j}}, \, \dots \, , \, \boldsymbol{f}_n \,\} \in \mathbb{R}_n$ *образует базис тогда и только тогда, когда матрица*

$$\boldsymbol{T} = \left[\, \boldsymbol{f}_1 \dots \ \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{j}} \ \dots \ \boldsymbol{f}_n \,\right]$$

обратима.

Компоненты вектор-столбцов $\{\, \boldsymbol{f}_1, \, \dots \, , \, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{j}}, \, \dots \, , \, \boldsymbol{f}_n \,\} \in \mathbb{R}_n$ *одновременно являются их координатами в каноническом базисе* $\{\, \boldsymbol{e} \,\} = \{\, \boldsymbol{e}_1, \, \dots \, , \, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{i}}, \, \dots \, , \, \boldsymbol{e}_n \,\}$

$$\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{j}} \xrightarrow{\{\boldsymbol{e}\}} \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{j}}$$

Следовательно, матрицей перехода от старого базиса $\{\, \boldsymbol{e} \,\}$ *к новому базису* $\{\, \tilde{\boldsymbol{e}} \,\} = \{\, \boldsymbol{f} \,\}$ *является просто матрица* $\boldsymbol{T}$. *Построив матрицу*

$$\tilde{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{T}^{-1} = \left[\, \boldsymbol{g}_1 \ \dots \ \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{i}} \ \dots \ \boldsymbol{g}_n \,\right]$$

непосредственно можно убедиться, что

$$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{i}} \xrightarrow{\{\boldsymbol{f}\}} \boldsymbol{g}_{\boldsymbol{i}}$$

9. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ОПЕРАТОРА

Вектор $\boldsymbol{f}_0 \neq \boldsymbol{0}$ *называется* ***собственным вектором*** *оператора* $\mathbf{A}$, *отвечающим* ***собственному значению*** λ_0, *если*

$$\mathbf{A}\boldsymbol{f}_0 = \lambda_0 \boldsymbol{f}_0 \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I}) \underset{\underset{\boldsymbol{0}}{\neq}}{\boldsymbol{f}_0} = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f}_0 \in \operatorname{Ker}(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I}) \neq \boldsymbol{0}$$

Множество собственных векторов, отвечающих собственному значению λ_0, *с присоединенным нулевым вектором образует собственное подпространство* $\mathbb{F}_0$

Замечание. *Собственное подпространство* $\mathbb{F}_0$ *является простейшим инвариантным подпространством оператора* $\mathbf{A} : \mathbb{F}_0 \to \mathbb{F}_0$. *Действие* $\mathbf{A}$, *как оператора в* $\mathbb{F}_0$, *самое простое (“одномерное”), сводящееся к умножению на число* λ_0: $\mathbf{A}\Big|_{\mathbb{F}_0} = \lambda_0 \boldsymbol{I}_{n_0}$

№ 9.2.

Пусть $\boldsymbol{A}$ *- матрица оператора* $\mathbf{A}$ *в некотором базисе* $\{\boldsymbol{e}\}$, *а* $\boldsymbol{t}_0 \neq \boldsymbol{0}$ *столбец-координат собственного вектора* $\boldsymbol{f}_0 \neq \boldsymbol{0}$. *Тогда,*

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{t}_0 = \lambda_0 \boldsymbol{t}_0 \quad \Leftrightarrow \quad (\boldsymbol{A} - \lambda_0 \boldsymbol{I})\boldsymbol{t}_0 = \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{t}_0 \in \mathbb{F}_0 = \operatorname{Ker}(\boldsymbol{A} - \lambda_0 \boldsymbol{I}) \neq \boldsymbol{0} \quad \Leftrightarrow \quad \det(\boldsymbol{A} - \lambda_0 \boldsymbol{I}) = 0$$

Следовательно, λ_0 *является корнем полинома* $n^{\underline{\text{ой}}}$ *степени (характеристического)*

$$p_A(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = (-\lambda)^n + \ldots \qquad \Rightarrow \qquad p_A(\lambda_0) = 0$$

а столбец координат $\boldsymbol{t}_0 \neq \boldsymbol{0}$ *вектора* $\boldsymbol{f}_0 \neq \boldsymbol{0}$ *в базисе* $\{\boldsymbol{e}\}$ *является ненулевым решением однородной системы линейных уравнений*

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_0 \boldsymbol{I})\boldsymbol{t}_0 = \boldsymbol{0}$$

Замечание. *Поскольку всякий полином степени* $n \geq 1$ *имеет* n *корней с учетом их кратности (вообще говоря, комплексных), то операторы, действующие в комплексных линейных пространствах, имеют хотя бы одно собственное значение. В вещественном случае оператор может вовсе не иметь ни одного собственного значения (соответственно собственных векторов).*

Собственные векторы $\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{f}_3, \ldots$, *отвечающие* ***различным*** *собственным значениям* $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \ldots$, ***линейно независимы***.

Следовательно, если характеристический полином $p_A(\lambda)$ *имеет* n *различных корней* $\lambda_1 \neq \ldots \neq \lambda_n$, *то система соответствующих собственных векторов* $\{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_n\}$ *образует базис.*

10. ПРОЕКТОРЫ.
СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ
ДИАГОНАЛИЗИРУЕМОГО ОПЕРАТОРА

Пусть $\{e\}$ *некоторый произвольный базис в линейном пространстве* $\mathbb{E}$. *Разобьем его на две линейно независимые подсистемы*

$$\{e\} = \{\{f_1, \ldots, f_m\}, \{g_1, \ldots, g_{n-m}\}\} = \{f\} \cup \{g\}$$

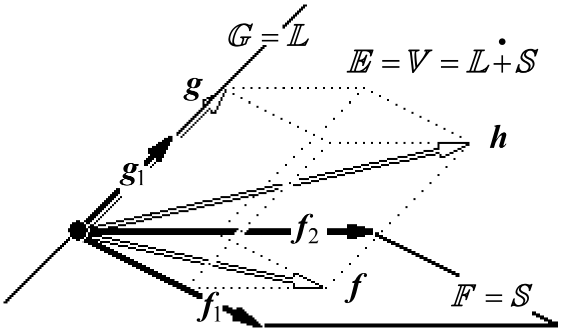
и построим подпространства (линейные оболочки)

$$\mathbb{F} = \mathrm{Lin}\{f_1, \ldots, f_m\}, \quad \mathbb{G} = \mathrm{Lin}\{g_1, \ldots, g_{n-m}\}$$

Тем самым, получим разбиение всего пространства в прямую сумму $\mathbb{E} = \mathbb{F} \dot{+} \mathbb{G}$

***Замечание**. Каждое подпространство* $\mathbb{F}$, $\mathbb{G}$ *называется дополнением ("косым") другого подпространства до всего пространства. Очевидно, для данного подпространства существует бесконечно много "косых" дополнений. Далее, разлагая произвольный вектор* $\forall h \in \mathbb{E}$

$$h = \underbrace{(\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_m f_m)}_{f} + \underbrace{(\beta_1 g_1 + \ldots + \beta_{n-m} g_{n-m})}_{g}$$



получим его разложение (однозначное) на две составляющие $\mathbb{F} \ni f$, $g \in \mathbb{G}$, *получившие названия **проекций** вектора* h *на подпространства* $\mathbb{F}$ *и* $\mathbb{G}$ *параллельно* $\mathbb{G}$ *и* $\mathbb{F}$ *соответственно. Тем самым, определяются "косые" **проекторы*** $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ *на подпространства* $\mathbb{F}$ *и* $\mathbb{G}$ *параллельно соответственно* $\mathbb{G}$ *и* $\mathbb{F}$

$$h \xrightarrow{\mathbf{P}} f = \mathbf{P}h, \qquad h \xrightarrow{\mathbf{Q}} g = \mathbf{Q}h$$

Очевидно,

$$\mathbf{I} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}, \qquad \left[\begin{array}{l} \mathbf{P}^2 = \mathbf{P} \\ \mathbf{Q}^2 = \mathbf{Q} \end{array}\right., \qquad \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{0}$$

при этом

$$\mathbb{F} = \mathrm{Ran}\,\mathbf{P}, \quad \mathbb{G} = \mathrm{Ker}\,\mathbf{P} \qquad \mathbb{G} = \mathrm{Ran}\,\mathbf{Q}, \quad \mathbb{F} = \mathrm{Ker}\,\mathbf{Q}$$

Нетрудно видеть, что матрицы $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$ *операторов проектирования* $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ *в "естественном" базисе* $\{e\} = \{f\} \cup \{g\}$ *равны*

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix}$$

В матричном представлении свойства операторов проектирования - очевидны

№ 10.2. *Пусть*

$$\{\, \lambda_1, \, \dots\, , \, \lambda_k, \, \dots\, , \, \lambda_m \,\}$$

все различные собственные значения линейного оператора $\mathbf{A}$*, соответствующие собственным подпространствам*

$$\{\, \mathbb{F}_1, \, \dots\, , \, \mathbb{F}_k, \, \dots\, , \, \mathbb{F}_m \,\}$$

Обозначим базисы собственных подпространств через

$$\{\,\{\, \boldsymbol{f}_{1_1}, \dots ,\boldsymbol{f}_{1_{n_1}} \},\, \dots ,\{\, \boldsymbol{f}_{k_1}, \dots ,\boldsymbol{f}_{k_{n_k}} \},\, \dots ,\{\, \boldsymbol{f}_{m_1}, \dots ,\boldsymbol{f}_{m_{n_m}} \}\,\}$$

В общем случае, объединенная система подбазисов всего лишь некоторая линейно независимая система векторов в пространстве $\mathbb{E}$ *(* **№ 9.2.*a.***, ***b.***, ***c.****)*

Пусть объединенная система собственных векторов образует базис в пространстве $\mathbb{E}$

В этом случае (**№ 9.2.*d.***) *оператор* $\mathbf{A}$*, имеющий в некотором (старом) базисе* $\{\boldsymbol{e}\}$ *матрицу* $\boldsymbol{A}$*, в базисе* $\{\,\boldsymbol{f}\,\}$ *из собственных векторов (новом) имеет диагональную матрицу*

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \ddots\ \lambda_1 \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \begin{bmatrix} \lambda_k & 0 \\ 0 & \ddots\ \lambda_k \end{bmatrix} & 0 \\ & & \ddots \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} \lambda_m & 0 \\ 0 & \ddots\ \lambda_m \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \boldsymbol{I}_{n_1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & \lambda_k \boldsymbol{I}_{n_k} & \boldsymbol{0} \\ & & \ddots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \lambda_m \boldsymbol{I}_{n_m} \end{bmatrix}$$

(поэтому соответствующий оператор называется диагонализируемым).

Обозначим через $\boldsymbol{t}_{k_i}$ *столбец координат собственного вектора* $\boldsymbol{f}_{k_i}$*, соответствующим собственному значению* λ_k*, в старом базисе* $\{\boldsymbol{e}\}$*. Тогда матрица перехода от старого базиса* $\{\boldsymbol{e}\}$ *к новому* $\{\,\boldsymbol{f}\,\}$ *базису из собственных векторов равна*

$$\boldsymbol{T} = \big[\,[\,\boldsymbol{t}_{1_1}\ \dots\ \boldsymbol{t}_{1_{n_1}}\,]\ \dots\ [\,\boldsymbol{t}_{k_1}\ \dots\ \boldsymbol{t}_{k_{n_k}}\,]\ \dots\ [\,\boldsymbol{t}_{m_1}\ \dots\ \boldsymbol{t}_{m_{n_m}}\,]\,\big]$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{\Lambda} \cdot \boldsymbol{T}^{-1}$$

Далее, произвольный вектор пространства может быть однозначно разложен по базису

$$\boldsymbol{h} = \underbrace{\left(x_{1_1} \boldsymbol{f}_{1_1} + \dots + x_{1_{n_1}} \boldsymbol{f}_{1_{n_1}} \right)}_{\boldsymbol{f}_1 \in \mathbb{F}_1} + \dots + \underbrace{\left(x_{k_1} \boldsymbol{f}_{k_1} + \dots + x_{k_{n_k}} \boldsymbol{f}_{k_{n_k}} \right)}_{\boldsymbol{f}_k \in \mathbb{F}_k} + \dots + \underbrace{\left(x_{m_1} \boldsymbol{f}_{m_1} + \dots + x_{m_{n_m}} \boldsymbol{f}_{m_{n_m}} \right)}_{\boldsymbol{f}_m \in \mathbb{F}_m}$$

т.е. в данном случае в сумму собственных векторов $\boldsymbol{f}_k$

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f}_1 + \dots + \boldsymbol{f}_k + \dots + \boldsymbol{f}_m \quad \Leftrightarrow \quad \mathbb{E} = \mathbb{F}_1 \dot{+} \dots \dot{+} \mathbb{F}_k \dot{+} \dots \dot{+} \mathbb{F}_m$$

получивших название ***проекций*** *вектора* $\boldsymbol{h}$ *на собственные подпространства* $\mathbb{F}_k$ *параллельно сумме остальных собственных подпространств* $\mathbb{F}_1 \dot{+} \dots \dot{+} \mathbb{F}_m$

Действие оператора $\mathbf{A}$ *сводится к умножению каждого слагаемого на соответствующее собственное значение*

$$\mathbf{A}\boldsymbol{h} = \lambda_1 \boldsymbol{f}_1 + \dots + \lambda_k \boldsymbol{f}_k + \dots + \lambda_m \boldsymbol{f}_m$$

Определим операторы ***проектирования***

$$\boldsymbol{h} \xrightarrow{\mathbf{P}_k} \boldsymbol{f}_k = \mathbf{P}_k \boldsymbol{h} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}_j \cdot \mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_j = \delta_{ij} \mathbf{P}_j$$

Полученным выше разложениям произвольного вектора $\boldsymbol{h}$ *и действию оператора* $\mathbf{A}$ *с помощью проекторов можно придать вид*

$$\begin{bmatrix} \mathbb{E} = \mathbb{F}_1 \dot{+} \dots \dot{+} \mathbb{F}_k \dot{+} \dots \dot{+} \mathbb{F}_m \\ \mathbf{A}\big|_{\mathbb{F}_k} = \lambda_k \boldsymbol{I}_{n_k} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{h} = \boldsymbol{f}_1 + \dots + \boldsymbol{f}_k + \dots + \boldsymbol{f}_m \\ \mathbf{A}\boldsymbol{h} = \lambda_1 \boldsymbol{f}_1 + \dots + \lambda_k \boldsymbol{f}_k + \dots + \lambda_m \boldsymbol{f}_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{I} = \mathbf{P}_1 + \dots + \mathbf{P}_k + \dots + \mathbf{P}_m \\ \mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{P}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{P}_k + \dots + \lambda_m \mathbf{P}_m \end{bmatrix}$$

Замечание. *Полученное спектральное разложение диагонализируемых операторов позволяет для них естественным образом ввести функциональное исчисление, полагая*

$$y = f(x) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = f(\mathbf{A}) = f(\lambda_1)\mathbf{P}_1 + \ldots + f(\lambda_k)\mathbf{P}_k + \ldots + f(\lambda_m)\mathbf{P}_m$$

Соответственно, для диагонализируемых матриц имеем

$$y = f(x) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{B} = f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{T} \cdot f(\boldsymbol{\Lambda}) \cdot \boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{T} \cdot \begin{bmatrix} f(\lambda_1)\boldsymbol{I}_{n_1} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & f(\lambda_k)\boldsymbol{I}_{n_k} & \boldsymbol{0} \\ & & \ddots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & f(\lambda_m)\boldsymbol{I}_{n_m} \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{T}^{-1}$$

Замечание. *Можно построить "естественное" функциональное исчисление произвольных матриц (операторов), содержащих жордановы клетки (* **№ 9.2.*a.***, ***b.***, ***c.****)*

Замечание. *Для любого произвольного оператора справедлива теорема Гамильтона-Кели*

$$p_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{0}$$